

磁場對電荷質點所產生之反射作用

沈 昌 民

緣 起

電子在磁場或電場中之運動，常可以 De Broglie 波在介質中之進行表示之。此乃電子光學(Electron Optics)之要義也。其實，任何電荷質點皆有此特性，僅電子之質量既小，其 De Broglie 波之波長必可極短。一般而言，其分化性能 (Resolving Power) 必甚高也。然電子光學多討論有關電子在磁場或電場內之折射現象，反射現象則甚少論及。本文乃專就此類反射作用，作一有系統之分析。

介 紹

吾人皆知當荷有電量之質點在磁場中運動時，其所行之路線並非直線。若運動方向與磁場垂直，則其路線為一圓，其半徑為

$$R = \frac{mV}{Bq} \dots\dots\dots(1)$$

式中 m 為質點之質量， q 為所荷之電量， V 為運動之速度， B 為磁場之強度 (Magnetic induction)。若運動方向不與磁場垂直，則其路線為一螺線 (Helix)。螺線之半徑仍可以與磁場垂直之分速度依(1)式而決定。螺線之一般變式 (Parametric equation) 可寫為

$$x = K\phi; \quad y = R \sin\phi; \quad z = R \cos\phi \dots\dots\dots(2)$$

式中 R 為螺線半徑， K 為一常數，等於線速度與角速度之比， ϕ 為變數，等於轉動之角度，或角速度與時間之積。

當電荷質點自磁場以外之空間，經過磁場之界面而進入磁場後，此彎曲之作用使此質點最後必再度經過磁場界面而返回原來之空間內。亦即磁場界面對此質點產生出反射之作用。

垂 直 投 射

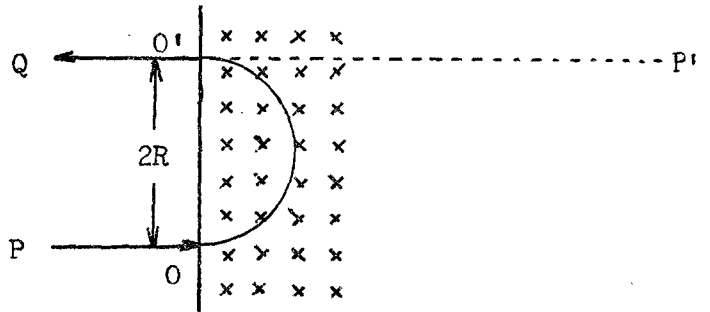
首先，假設磁場界面為一平面，且磁場亦平行於此界面。若電荷質點以速度 V 垂直射向此界面，則質點在磁場內之軌跡必為一半圓形。其半徑則可由(1)式求得。此質點行經半圓之路線後必再到達界面，並自磁場內射出。其速度仍為原速度，且亦必垂直於此界面。但反射後之質點並非沿反射前質點所行之路線而進行。投射線與反射線間之垂直距離為 $2R$ 。(見圖一)

在圖一內設 P 為質點之發射源點，則 P 點在磁場界面後，必有一像 (Image) 產生。此像之位置，可沿反射線相反之方向延長至 P' 點，使 $O'P'$ 等於半圓弧 $\widehat{OO'}$ 及 OP 之和。此方法與光源在鏡面後所產生之

像之方法相同。但磁場之反射，顯然有下列之特點：(1)此像不在投射線上。(2)此像比光源在鏡面後之像更深入於界面之後。

投射線不垂直於界面，但垂直於磁場

若質點之運動方向不垂直於界面，但垂直於磁場，其反射作用將較垂直投射略為複雜。首先，如圖二 a 所示，若投射線與法線所成之投射角為一正值 θ_1 ，則質點在磁場內之路線必小於半圓形。由幾何原理可證明，反射線與法線所成之反射角 θ_2 ，必等於投射角 θ_1 ，與光反射之情況相同。但投射點（即投射線與界面所交之點）並不與反射點（即反射線與界面所交之點）相重合。設此兩點間之距離為 AB，根據圖三 a 所示得知。



$$AB = 2R \cos\theta \dots\dots\dots(3) \quad \text{圖 一}$$

試令 $\theta = 90^\circ$ ，則 $AB = 2R$ 。可知垂直投射乃此情況之一種特殊情況。

若投射角為一負角 θ_1 （如圖二 b 所示），則質點在磁場內之路線必大於半圓形。但反射角 θ_2 仍等於投射角。且由圖三 b 仍可證明 $AB = 2R \cos\theta$ 。

至於質點源在界面後之像，仍可依前述之同一法則推定。自圖三可知，無論 θ 為正或為負，圓弧 \widehat{AB} 之長皆為

$$\widehat{AB} = R(\pi - 2\theta)$$

斜 角 投 射

在圖四中，設 O 點為電荷質點之發射源點，平面 n 為磁場界面。磁場在平面 n 之下。今將座標之原點放於 O 點上，且令 X- 軸與磁場平行。設質點係沿任一直線 OP 而進行。P 點在平面 n 上，其座標為 (x, y, D) D 為 O 點至平面 n 之垂直距離。OP 之向量式可寫為：

$$OP = ix + jy + kD$$

設在此方向上之速度為 V，則速度之向量式為：

$$V = i \frac{V_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}} + j \frac{V_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}} + k \frac{VD}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}} \dots\dots\dots(4)$$

由此可知速度 V 在 X-, Y- 及 Z- 軸上之分速度當分別為：

$$V_x = \frac{V_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}}; V_y = \frac{V_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}}; V_z = \frac{VD}{\sqrt{x^2 + y^2 + D^2}}$$

當質點到達界面後， V_y 及 V_z 所產生之合速度 $\sqrt{V_y^2 + V_z^2}$ 使此質點在磁場內產生圓周運動，而速度 V_x 則使質點仍保持等速之直線運動向 X- 軸方向進行。此二運動之聯合運動乃使質點沿螺旋線而進行。

質點在磁場內停留之時間，完全由圓周運動而決定。由以上所述，已知在磁場內圓弧之長度為 $R(\pi - 2\theta)$ 。而沿此圓弧進行之速度為 $\sqrt{V_y^2 + V_z^2}$ 。故質點在磁場內停留之時間為：

$$t = \frac{R(\pi - 2\theta)}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\pi - 2\theta}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}} \cdot \frac{m\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}{Bq} = \frac{m}{Bq} (\pi - 2\theta)$$

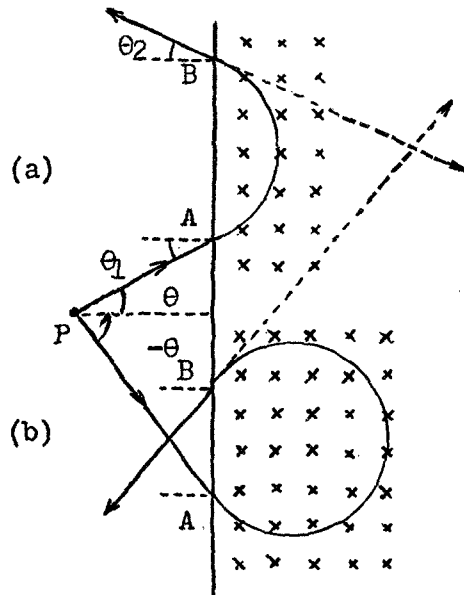


圖 二

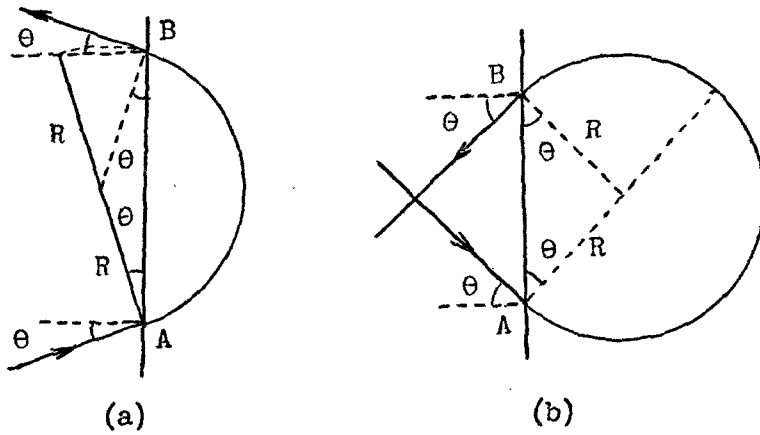


圖 三

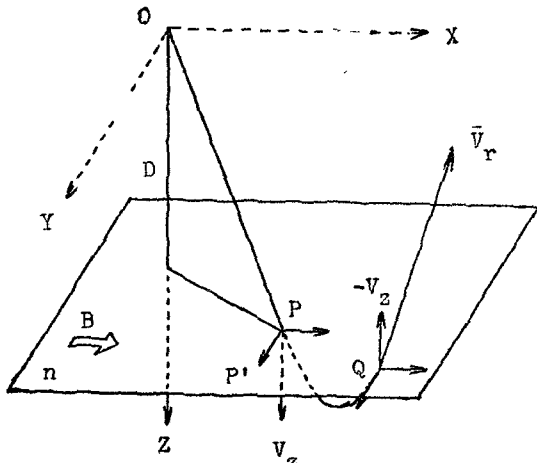


圖 四

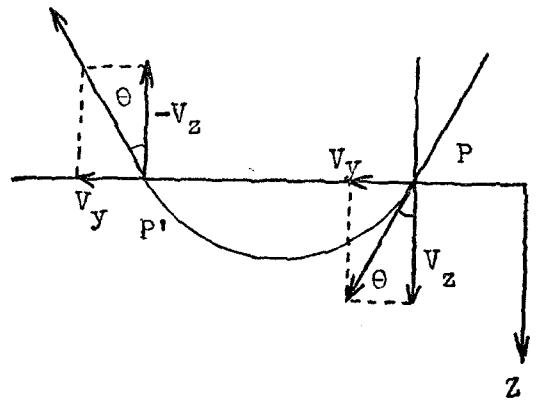


圖 五

式中 θ 為投射角。但依圖五得知此 θ 角可由下式求得：

$$\tan\theta = V_y/V_x = y/D$$

由此可知

$$t = \frac{m}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})$$

當質點作圓周運動之同時，質點在 X- 軸方向上亦移動一 $V_x t$ 之距離。故

$$P'Q = V_x t = V_x \frac{m}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})$$

在 Y- 軸方向上，圓周運動使質點移動 PP' 一段距離（參閱圖四及圖五）。由(3)式可得

$$PP' = 2R \cos\theta = \frac{2m}{Bq} \sqrt{V_y^2 + V_z^2} \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}} = \frac{2mV_x}{Bq}$$

今知質點在 Q 點處自磁場內射出故 Q 點之座標當為：

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + V_x t = x + \frac{mV_x}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) \\ y' &= y + PP' = y + \frac{2mV_x}{Bq} \\ z' &= D \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

又 PQ 兩點間之直線距離為

$$\sqrt{(V_x t)^2 + PP'^2} = \frac{m}{Bq} \sqrt{V_x^2 (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})^2 + 4V_x^2} \dots\dots\dots(6)$$

當質點自磁場內射出時，其在 X- 及 Y- 軸方向上之分速度仍為 V_x 及 V_y 不變。但在 Z- 軸方向上之速度雖仍為 V_z ，但方向已轉 180° ，即沿 Z- 軸相反方向進行。故反射後速度之向量式為

$$V_r = iV_x + jV_y - kV_z \dots\dots\dots(7)$$

總之，磁場對電荷質點必產生反射作用。其反射定律可述之如下：

- (1) 反射角必等於投射角。（比較(4)(7)二式可得）
- (2) 反射點必不與投射點相重合，二者間之距離可由(6)式求得。反射點之位置可由(5)式求得。
- (3) 反射線與法線所成之反射面並非必須與投射面（投射線與法線所成之面）相重合，但二者必互相平行。（由(4)及(7)式可知）

像 的 分 析

斜角投射時，質點發射源點在界面後之像，可將向量 V_r （即(7)式）自 Q 點向相反方向延伸至某一點，使 Q 點至此點之距離等於 P, Q 兩點間螺線長度與 OP 之和。為求得 PQ 兩點間螺線之長度，可先將螺線方程式(2)改寫為。

$$x = V_x t; \quad y = R \sin\omega t; \quad z = R \cos\omega t$$

微分後可得 $dx = V_x dt; \quad dy = R\omega \cos\omega t; \quad dz = -R\omega \sin\omega t$

因此，螺線之長度可由下式求得

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{V_x^2 + R^2\omega^2} dt = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} dt = V dt$$

$$S = \int_0^{\frac{m}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})} V dt = \frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})$$

故由 Q 點沿螺線至 P 點，直沿直線到 O 點之總長度為

$$L = S + OP = \frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) + \sqrt{x^2 + y^2 + D^2}$$

由(7)式可知 V_r 之“方向餘弦”(Direction Cosine) 為

$$\begin{aligned} \cos \alpha_x &= V_x/V = x/\sqrt{x^2+y^2+D^2} \\ \cos \alpha_y &= V_y/V = y/\sqrt{x^2+y^2+D^2} \\ \cos \alpha_z &= V_z/V = -D/\sqrt{x^2+y^2+D^2} \end{aligned}$$

在 V_r 之相反方向上，則方向餘弦皆應加一負號。若以 Q 點為座標原點，則此像之座標當為：

$$\begin{aligned} x_i &= L (-\cos \alpha_x) = -L \cos \alpha_x \\ y_i &= L (-\cos \alpha_y) = L \cos \alpha_y \\ z_i &= L \cos \alpha_z \end{aligned}$$

再改以 O 點為座標原點，則像之座標為

$$X_i = x' + x_i = x + \frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) - \left[\frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) + \sqrt{x^2+y^2+D^2} \right] \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+D^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} Y_i &= y' + y_i = y + 2 \frac{mV_x}{Bq} - \left[\frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D} + \sqrt{x^2+y^2+D^2}) \right] \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+D^2}} \\ &= \frac{mV}{Bq} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+D^2}} [2D - y (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})] \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_i &= D + z_i = D + \left[\frac{mV}{Bq} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) + \sqrt{x^2+y^2+D^2} \right] \frac{D}{\sqrt{x^2+y^2+D^2}} \\ &= 2D + \frac{mV}{Bq} \frac{D}{\sqrt{x^2+y^2+D^2}} (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D}) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

最後可得結論如下：

- (1) 因 $X_i = 0$ ，故無論質點向何方向進行，其像必產生於 YZ- 平面上。
- (2) 因 x 在 Y_i 及 Z_i 式內皆為平方，故 x 為正或負號對像之位置無影響。
- (3) 如將 y 保持一常數，則當 $x=0$ 時， Y_i 及 Z_i 為最大值。當 x 趨近無限大時， Y_i 為 0， Z_i 等於 $2D$ 。

為對像所生成之位置有一清晰之觀念，可將(8)及(9)式中之 $\frac{mV}{Bq} / \sqrt{x^2+y^2+D^2}$ 消去，則

$$Z_i = \frac{D (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})}{2D - y (\pi - 2 \tan^{-1} \frac{y}{D})} Y_i + 2D$$

若 y 為一常數，則此為一直線方程式，其截部 (Intercept) 為 $2D$ ，其斜率 (Slope) 則由 y 而決定。圖六為 YZ- 平面上像位置之明示圖。例如當 $y=0$ 時，像皆生在直線 AC 上，若此時 $x=0$ ，則像在 C 點，若此時 $x=\infty$ ，則像在 A 點。 x 在 0 及 ∞ 之間之任何值，則像亦在 A、O 兩點間之各相當點。當 y 為正值時則 C 點即沿 \widehat{AC} 弧而趨向於 A。故 AC 直線及 AC 弧間之範圍 (有斜線部份)，乃表示 y 為正值時 x 為任何值時像存在之範圍。當 y 為負值，則 C 點向相反方向沿曲線而移動。任何一固定之負 y 值，即有一相當之直線。例如 $y=-D$ 時其像即在 A 點及 E 點間之直線上。此時若 $x=0$ ，則像在 E 點， $x=\infty$ 時，則像在 A 點。故曲線 ACEF 與直線 AF 所包圍之範圍乃質點源向任何方向進行時像產生之範圍。

結 論

平面磁場界面對電荷質點所產生之反射與光線被平面鏡反射有相同之處，例如反射角等於投射角。但亦有不同之處，例如前述之投射點不與反射點重合等。同時，光源點在平面鏡後所成之像必為一點，但電荷質點源在平面界面後之像則非為一點，而為一有固定範圍之面積。

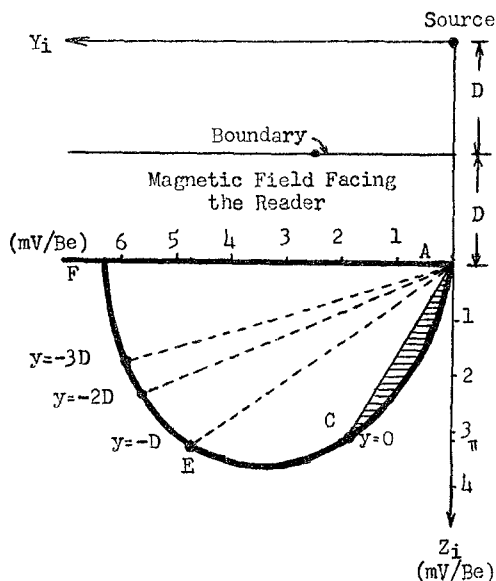


圖 六

參 考 資 料

1. Applied Electronics, Truman S. Gray, 2nd edition, Technology press of M. I. T., 1955.
2. Electron Tube Circuits, Seely, 2nd edition, McGraw-Hill book Co., 1958
3. Electronics, Jacob Millman and Samuel Seely, 2nd edition, 1951.
4. Electronic Engineering Principles, John D. Ryder, 3rd. edition, Prentice-Hall Series, 1961.

THE REFLECTION OF CHARGED PARTICLES BY MAGNETIC FIELD

Shen Chang-Min

When charged particles travel with constant velocity along a straight line into a magnetic field, their paths in the field are always bent into a circle or a helix. Finally, they will leave the field as though reflection occurs. In this paper, the reflection of charged particles by a plane magnetic boundary surface are studied under different cases of incidence. Law of this kind of reflection is given in this paper. And, also, there is an analysis about the position of the image produced by this reflection.